



Matematica e geometria con un foglio di carta

Antonio Caserta

Riassunto Origami, Geometria, Matematica: Un foglio di carta, la geometria di riga e compasso, gli assiomi di Huzita, i quali permettono di risolvere, a differenza della geometria classica, alcuni problemi come le equazioni di terzo grado, la trisezione dell'angolo, la duplicazione del cubo. L'origami può dare una "prospettiva" nuova nello studio della geometria e dell'algebra.

Abstract Origami, Geometry, Mathematics: A sheet of paper, the geometry of straight-edge and compass, the axioms of Huzita, that allow to solve some problems of classical geometry such as cubic equations, tri-section of an angle, duplication of a cube. Origami may provide a new "perspective" in the study of geometry and algebra.

Antonio Caserta

antonio2584@hotmail.it

studente presso il dip. di Matematica "Ulisse Dini" - Università di Firenze

Origami: Origini e sue applicazioni

Quando la parola “origami” viene menzionata, probabilmente molti pensano ad una piccola gru o forse ad una qualche barchetta. Il termine origami è di origine giapponese e significa “*piegare la carta*” o “*carta piegata*”, e indica la tecnica che permette di realizzare figure e forme di ogni tipo mediante la piegatura di uno o più fogli di carta. Nell’origami quindi non riveste particolare importanza l’oggetto finito bensì l’azione stessa di piegare la carta.

La storia dell’Origami comincia, probabilmente, con l’invenzione della carta, che si può far risalire ufficialmente al 105 d.C. in Cina. Il nuovo materiale aveva, fra i suoi innumerevoli pregi, quello di poter essere piegato e ripiegato senza strapparsi e di “mantenere la piega”.

L’origami potrebbe essere nato allora, ma non esistono notizie precise in merito; occorre aspettare il 610 d.C., allorché un monaco buddista portò la tecnica per la fabbricazione della carta in Giappone.

Inizialmente la raffinata carta e le figure che se ne ottenevano venivano utilizzate nei templi buddisti ed impiegate per le funzioni religiose; in occasione per esempio dei matrimoni della nobiltà giapponese venivano creati veri e propri assemblaggi di gru (vedi Fig.1) che servivano per augurare una vita lunga e felice.

L’origami, come lo conosciamo oggi, porta con sé vari stili tra cui quello tradizionale-figurativo, rigido, modulare etc.

Secondo l’*origami tradizionale* i modelli devono essere effettuati utilizzando un unico foglio di carta quadrato, che non può essere né tagliato né incollato in alcun modo. In questa categoria rientra ad esempio la *gru* o “ucellino che batte le ali”.

L’*origami rigido* esplora l’idea di piegare un foglio di carta in modo tale che possa collassare facilmente, senza piegare le regioni tra le sue pieghe. Detto in altri termini, ci si chiede se il foglio di carta possa essere piegato con una serie di movimenti rigidi. La piega può rappresentare in senso applicativo una sorta di “cerniera” che può connettere due fogli metallici. Infatti l’origami rigido sta trovando tutt’oggi applicazione nel campo dell’ingegneria, in particolar modo in quella aerospaziale (i.e. Il *Miura map fold*, inventato da Koryo Miura¹ è un origami rigido che viene utilizzato per il dispiegamento dei pannelli solari nei satelliti spaziali). Sfortunatamente in

¹ Vedi Miura K.,1989, A note on intrinsic geometry of origami, in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Ferrara, Italia, p.239-249.

alcuni casi un singolo foglio di carta ha le sue limitazioni, quindi ecco l'*origami modulare-geometrico*.

I Modelli modulari (vedi Fig.4) sono costruiti con vari fogli di carta che vengono piegati in singole *unità o moduli*, i quali vengono assemblati, incastrandoli assieme (attraverso alette e tasche create appositamente sempre di carta) per formare generalmente un modello più complesso. Il primo esempio di origami modulare si può fare risalire intorno al 1734, un cubo chiamato "magic treasure chest".

Per gli studenti di scuola superiore, l'origami può da un lato cercare di affinare il senso creativo e artistico della persona, come è stato già in passato notato dal Prof. Benedetto Scimemi "*....L'apporto educativo di giochi e passatempi basati sul piegare la carta è stato ampiamente riconosciuto dai pedagogisti, perché si tratta di attività che richiedono un controllo simultaneo manuale ed intellettuale ma lasciano grande spazio alla fantasia ed alla creatività....*"² dall'altro può rappresentare una importante chiave di lettura per la comprensione di numerosi aspetti matematici e per fissare numerosi concetti geometrici appresi a scuola.



Fig.1



Fig.2 Passero di Yoshizawa

² Vedi Scimemi B. *Algebra e geometria piegando la carta*, in: *Matematica: gioco ed apprendimento*, Roma, p. 79-87.



Fig.3 Rosa di Kawasaki

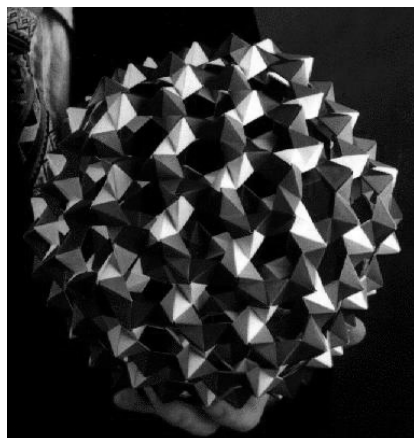


Fig.4 Modulare di Tom Hull

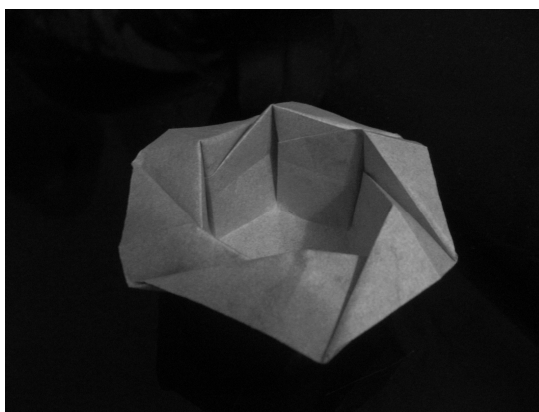


Fig.5 Scatola esagonale di A. Caserta

La geometria degli origami

Molti matematici che si occupano di geometria o di algebra astratta (per esempio in teoria dei gruppi, teoria di Galois, teoria dei grafi) hanno rivolto il loro studio alle costruzioni geometriche con l'origami. Un aspetto importante è la costruzione geometrica di numeri³.

L'origami o meglio la geometria che ne scaturisce risulta essere un mezzo più "forte" della geometria di riga e compasso.

³ Vedi Alperin R.C.,2000, A mathematical theory of origami constructions and numbers, *New York Journal of Mathematics*, Vol.6, p. 119-133.

Per comprendere quali costruzioni sono fattibili con l'origami e quali numeri sono costruibili, alcuni matematici hanno creato un vero e proprio sistema assiomatico, analogamente a quanto fatto con la geometria Euclidea; tali regole sono note come assiomi di Huzita.

Con la geometria degli origami si lavora su di un foglio di carta, che deve essere pensato semitrasparente, infinito, sottile ma abbastanza robusto, di spessore uniforme, non deformabile in maniera apprezzabile lungo la sua superficie, cioè non elastico; è invece deformabile perpendicolarmente alla sua superficie, per permetterne la sovrapposizione di alcune sue parti, ottenendo così quella che verrà chiamata piega.

L'ente fondamentale della geometria degli origami quindi è la retta a differenza del punto della geometria euclidea, e quest'ultimo nella geometria degli origami viene pensato come intersezione di due rette incidenti.

Gli assiomi della geometria degli origami definiscono una serie di procedure geometriche elementari:

O1: "Dati due punti P_1 e P_2 è possibile piegare un'unica retta che passa tali punti" (vedi Fig.6)

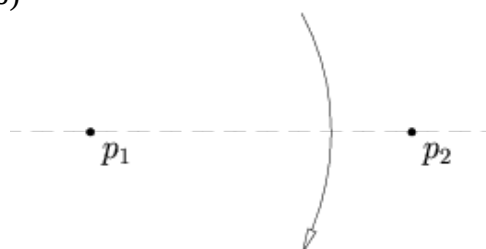


Fig.6

O2: "Dati due punti P_1 e P_2 è possibile piegare un'unica retta che porta P_1 su P_2 " (vedi Fig.7)

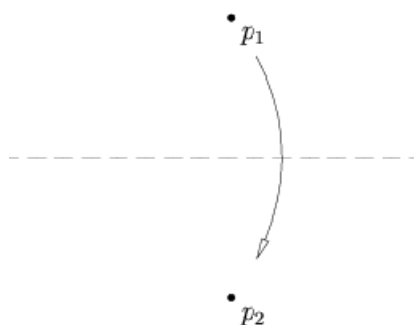


Fig.7

O3: "Date due rette l_1 e l_2 , è possibile piegare una retta che porta l_1 su l_2 " (vedi Fig.8)

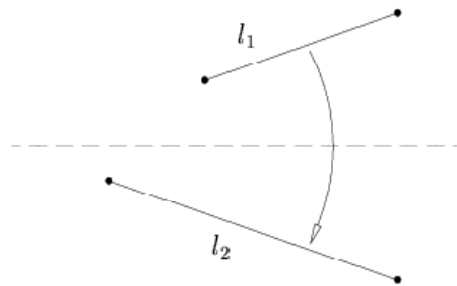


Fig.8

O4: “Dati un punto P_1 e una linea l_1 , è possibile piegare un’unica retta perpendicolare a l_1 e passante per P_2 ” (vedi Fig.9)

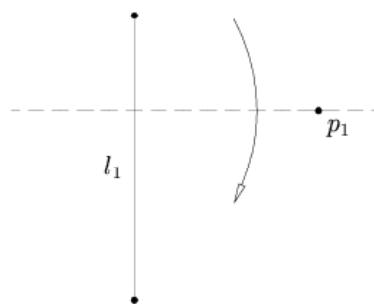


Fig.9

O5: “Dati due punti P_1 e P_2 e una retta l_1 , è possibile piegare una retta che porta P_1 su l_1 e passante per P_2 ” (vedi Fig.10)

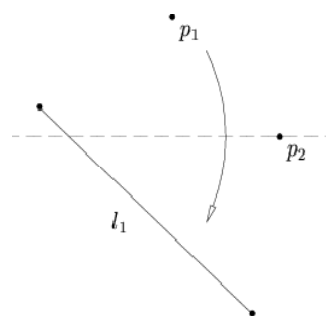


Fig.10

O6: “Dati due punti P_1 e P_2 e due rette l_1 e l_2 , è possibile piegare una retta che porta P_1 su l_1 e P_2 su l_2 ” (vedi Fig.11)

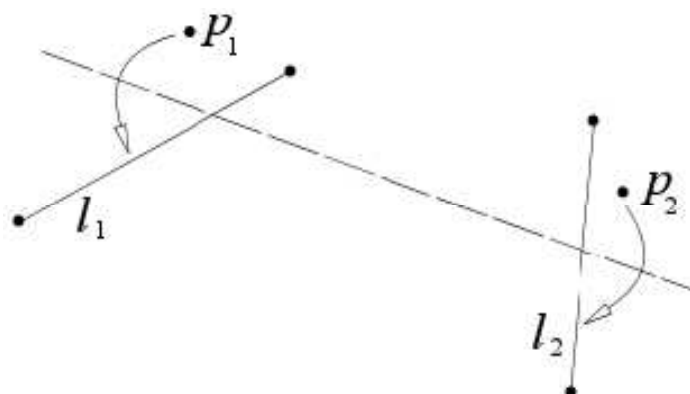


Fig.11

I primi cinque assiomi della geometria degli origami si possono riscontrare anche nelle costruzioni geometriche euclidee effettuate con riga e compasso, pensati questi ultimi come strumenti non graduati che non servono per riportare misure ma solo per tracciare cerchi e linee.

A questo punto dobbiamo cercare di comprendere cosa effettivamente si può “costruire” con la geometria degli origami; ciò equivale a comprendere cosa ci consente di fare ciascun assioma:

L’assioma O1 ci permette di “tracciare” sul nostro foglio rette passanti per due punti assegnati.

L’assioma O2 di individuare l’asse del segmento $\overline{P_1P_2}$.

L’assioma O3 di costruire la bisettrice dell’angolo che ha il vertice nel punto di intersezione delle due rette l_1 e l_2 e i lati sulle due rette, quando queste non sono parallele.

L’assioma O4 di costruire la retta ortogonale ad una retta assegnata l_1 e passante per P_1 .

L’assioma O5 di individuare la retta tangente ad una parabola di fuoco P_1 e direttrice l_1 passante per il punto P_2 .

L’assioma O6, infine di individuare la tangente comune alle parabole C_1 e C_2 con fuochi P_1 e P_2 e direttrici l_1 e l_2 rispettivamente.

Quest’ultima costruzione porterà, come vedremo, la geometria degli origami a differenziarsi dalla geometria di Riga e Compasso.

Sulla risoluzione di equazioni di secondo e terzo grado con l'Origami

La piega costruita utilizzando l'assioma O5 rappresenta la tangente alla parabola con P_1 fuoco P_1 e direttrice l_1 . Prendiamo un foglio di carta, ad esempio di forma quadrata, e consideriamo uno dei lati come direttrice l_1 e un punto P_1 all'interno del foglio. Consideriamo inoltre un punto P_2 giacente, ad esempio sul lato destro (o sinistro) del foglio. Quindi applicando l'assioma O5 portiamo P_1 su l_1 tracciando così la piega l_2 passante per P_2 (vedi Fig.12).

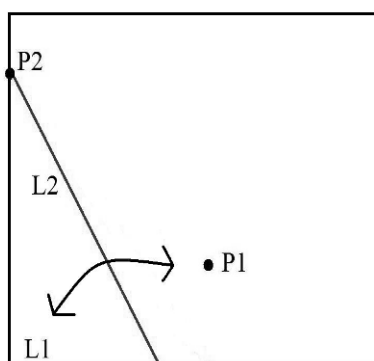


Fig.12

Dal punto P_1 costruiamo una linea normale alla porzione di piega l_1 usando l'assioma O4. Chiamiamo X il punto in cui questa linea interseca l_2 (vedi Fig.13).

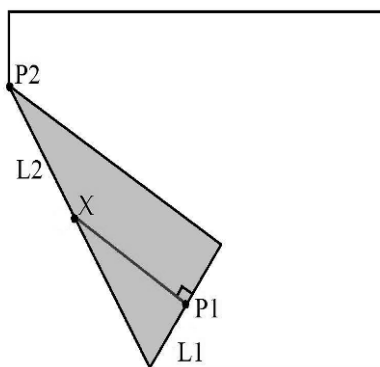


Fig.13

Riaprendo il foglio, possiamo osservare che il segmento $\overline{XP_1}$ ed il segmento $\overline{XA}$ sono congruenti. l_2 è l'asse del segmento $\overline{AP_1}$ per l'assioma O2, è biset-

trice dell'angolo AXP_1 per l'assioma O3. Quindi X è il punto su l_2 che risulta essere equidistante da P_1 e da l_1 . Per definizione questo punto appartiene alla parabola di fuoco P_1 e direttrice l_1 (vedi Fig.14).

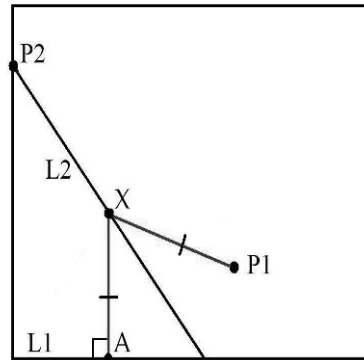


Fig.14

Scelto a questo punto Y su l_2 tra P_2 e X e usando l'assioma O4 costruiamo la retta normale a l_1 che interseca l_2 in Y , chiamando il segmento che si viene a formare YB . Notiamo che il triangolo YBA è retto, quindi $\overline{YB} < \overline{YA} = \overline{YP_1}$. Quindi il punto Y non appartiene alla parabola (vedi Fig.15).

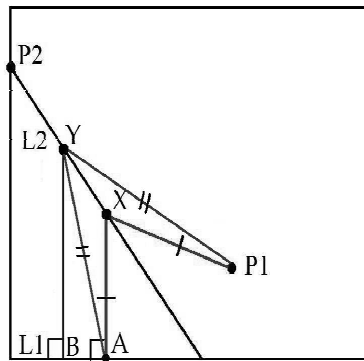


Fig.15

Lo stesso ragionamento si può utilizzare per mostrare che ogni punto su l_2 da X a l_1 (lato del quadrato) non appartiene alla parabola di fuoco P_1 e di direttrice l_1 . L'unico punto che giace sulla parabola è il punto X , che rappresenta quindi il punto di tangenza tra la retta l_2 e la parabola.

Chiaramente variando successivamente il Punto P_2 si possono ottenere altre rette tangenti alla parabola riapplicando, di volta in volta, la costruzione dell'assioma O5, ottenendo così la parabola come inviluppo delle sue rette tangenti (vedi Fig.16).

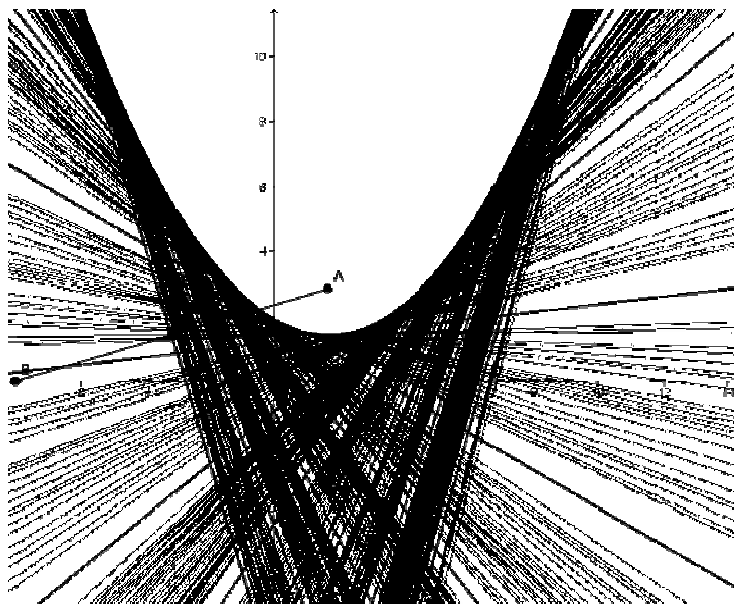


Fig.16

Si può dimostrare analiticamente che il problema di trovare una retta tangente ad una parabola e passante per un punto Q è equivalente a risolvere una equazione di secondo grado.

Consideriamo inizialmente una generica parabola con direttrice parallela all'asse delle ascisse di equazione:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ dove } a, b, c \text{ sono numeri reali con } a \neq 0$$

e la retta passante per il punto $Q = (x_Q, y_Q)$ di equazione:

$$y - y_Q = m(x - x_Q)$$

in cui m rappresenta il coefficiente della retta tangente alla parabola da determinarsi.

Impostando il seguente sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_Q = m(x - x_Q) \end{cases}$$

e imponendo la condizione di tangenza tra retta e parabola si può osservare che effettivamente m risolve l'equazione:

$$m^2 + m(-2b - 4ax_Q) + (b^2 - 4ac + 4ay_Q) = 0 \quad [1]$$

Nel caso la parabola abbia la direttrice in posizione generica possiamo usare una trasformazione affine del piano della forma:

$$\begin{cases} x' = u_1x + v_1y \\ y' = u_2x + v_2y \end{cases}$$

scegliendo i coefficienti in modo che nelle nuove coordinate x' e y' abbia la direttrice parallela all'asse delle ascisse. Il coefficiente angolare m' (di una retta tangente alla parabola) risolve (per quando detto sopra) l'equazione [1].

Il coefficiente angolare m iniziale è legato a m' dall'equazione:

$$m' = \frac{m\overline{u_1} - \overline{u_2}}{\overline{v_2} - m\overline{v_1}} \quad \text{con } \overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{v_1}, \overline{v_2} \mid \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u_1} & \overline{v_1} \\ \overline{u_2} & \overline{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [2]$$

Sostituendo m' con l'espressione [2], anche m risulta risolvere una equazione di secondo grado (eventualmente con alcuni coefficienti nulli).

Viceversa data un'equazione di secondo grado della forma:

$$x^2 + b'x + c' = 0 \quad \text{con } b \text{ e } c \text{ numeri reali} \quad [3]$$

Confrontandola con [1], assumendo $(x_Q, y_Q) = (0,0)$ e $a = 1$ si ha che

$$b = -\frac{b'}{2} \quad \text{e} \quad c = \frac{b'^2 - 4c'}{16}$$

Considerando la parabola di equazione:

$$C: y = x^2 - \frac{b'}{2}x + \frac{b'^2 - 4c'}{16}$$

e la retta $y = mx$, ragionando come sopra, si vede che m risolve effettivamente [3].

La piega costruita utilizzando l'assioma O6 rappresenta la tangente comune a due parabole con i fuochi P_1 e P_2 e con le direttrici l_1 ed l_2 rispettivamente. ■

Infatti portando il punto P_1 sulla retta l_1 , la traccia della piega sarà tangente alla parabola di fuoco P_1 e direttrice l_1 per l'assioma O5. Analogamente la stessa piega sarà anche tangente alla parabola con fuoco P_2 e direttrice l_2 .

In generale il problema di cercare la tangente comune a due parabole equivale analiticamente a risolvere un problema di terzo grado.

Infatti consideriamo le due parabole con equazioni:

$$C_1 : (y - h)^2 = 2e(x - g) \quad \text{e} \quad C_2 : x^2 = 2fy$$

e assumiamo che l'equazione che descrive una tangente comune a C_1 e C_2 sia:

$$t: y = mx + q$$

Tale tangente non sarà parallela né all'asse x né all'asse y .

Chiamiamo $P = (x_p, y_p)$ il punto in cui t risulta essere tangente a C_1 .

Allora t può anche essere rappresentata dall'equazione

$$(y - h)(y_p - h) = e(x - g) + e(x_p - g)$$

Se e solo se

$$y = \left(\frac{e}{y_p - h} \right) x + h + \frac{ex_p - 2eg}{y_p - g}$$

Segue che,

$$m = \frac{e}{y_p - h} \quad \text{e} \quad q = h + \left(\frac{ex_p - 2eg}{y_p - h} \right)$$

Allora

$$y_p = \frac{e + hm}{m} \quad \text{e} \quad x_p = \frac{q - h}{m} + 2g$$

e

$$(y_p - h)^2 = 2e(x_p - g)$$

Quindi,

$$\frac{e^2}{m^2} = 2e \left(\frac{q - h}{m} + g \right) \Rightarrow e = 2m(q - h + mg)$$

Chiamando $Q = (x_Q, y_Q)$ il punto in cui t risulta essere tangente a C_2 , t può essere rappresentata dall'equazione

$$y = \left(\frac{x_Q}{b} \right) x - y_Q$$

dopo alcuni passaggi si trova

$$q = -\frac{fm^2}{2}$$

sostituendo h in [1] si trova che

$$m^3 - \left(\frac{2g}{f} \right) m^2 + \left(\frac{2h}{f} \right) m + \frac{e}{f} = 0 \quad [4]$$

m rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente comune alle due parabole C_1 e C_2 .

Nel caso le due parabole abbiano direttrici in posizione generica, utilizziamo una trasformazione affine (come fatto in precedenza nel caso dell'equazione di secondo grado) che porta le due parabole ad avere le direttrici parallele agli assi ed aggiungendo eventualmente una traslazione per portare il vertice di una delle due parabole nell'origine degli assi.

Il coefficiente angolare m' di una retta tangente alle due parabole risolve quindi (per quando detto sopra) l'equazione [4] e risulta legato ad m dall'equazione [2] e sostituendo, anche m risolve un'equazione di terzo grado (eventualmente con alcuni coefficienti nulli).

Nel caso particolare che le due parabole iniziali abbiano le direttrici parallele si può utilizzare, come sopra, una trasformazione affine in modo tale che abbiano le direttrici parallele ad esempio all'asse delle ascisse.

$$C_1: y = a'x^2 \quad C_2: y = ax^2 + bx + c$$

Scrivendo l'espressione di una retta tangente alle due parabole si può notare che il coefficiente angolare risolve un'equazione di secondo grado.

Viceversa data un'equazione di terzo grado della forma:

$$x^3 + bx^2 + cx = d \text{ con } b, c, d \text{ coefficienti reali [5]}$$

Confrontando [5] con [4] e assumendo $f = 1$ si ha che

$$b = -2g, \quad c = 2h \quad \text{e} \quad d = -e$$

Oppure

$$g = -\frac{b}{2}, \quad h = \frac{c}{2}, \quad e = -d$$

Considerando le parabole di equazioni rispettivamente:

$$C_1 : \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = -2d \left(x - \frac{b}{2}\right) \quad \text{e} \quad C_2 : x^2 = 2y$$

e scrivendo l'espressione di una tangente comune alle due parabole, come fatto in precedenza, si osserva che il coefficiente angolare di tale retta risolve effettivamente [5].

■

A questo punto mostriamo che con l'origami si può risolvere [5]

L'equazione può essere interpretata geometricamente come segue (vedi Fig.17):

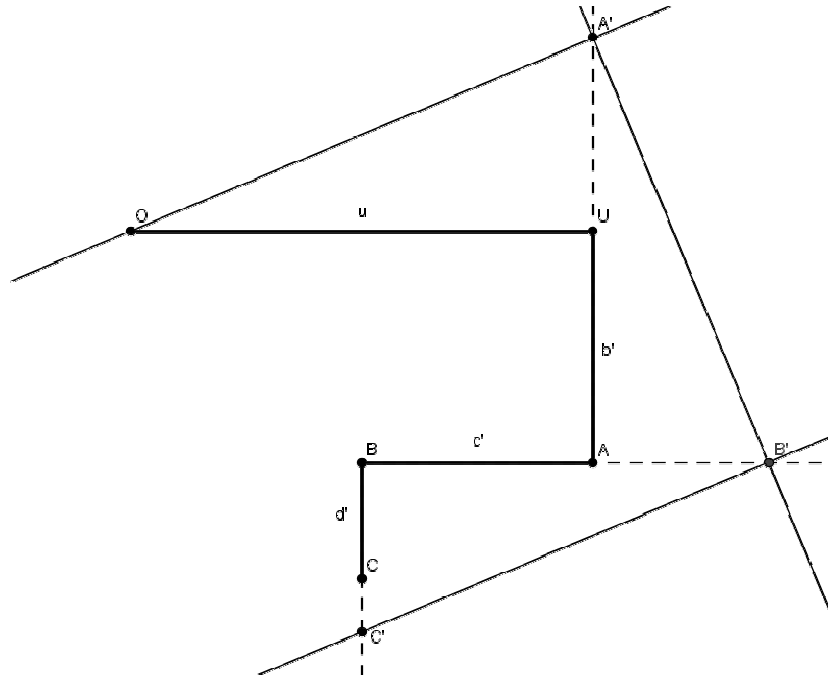


Fig.17

Si inizia da un generico punto O del piano tracciando un segmento $\overline{OU}$ di lunghezza 1 che costituirà l'unità di misura per l'intera costruzione. Si traccia un segmento $\overline{UA}$ di lunghezza $UA = b'$ ortogonale a OU che prosegue verso sinistra o verso destra a seconda che il coefficiente del termine di secondo grado sia positivo o negativo. Da A si traccia un segmento $\overline{AB}$ di lunghezza $AB = c'$ ortogonale ad $\overline{UA}$ procedendo verso sinistra o verso destra a seconda che il coefficiente del termine di primo grado abbia lo stesso segno del coefficiente precedente o segno opposto. Da B si traccia un segmento $\overline{BC} = d'$ con i precedenti accorgimenti.

A questo punto si prolungano i lati $\overline{UA}$, $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$. Si traccia una retta che parte da O con coefficiente angolare a piacere andando così ad individuare un punto A' sul prolungamento di $\overline{UA}$, successivamente si traccia la normale alla retta $\overline{OA'}$ passante per A' , tale retta incontra il prolungamento di $\overline{BA}$ in un punto; si continua con tale procedura fino ad arrivare sul prolungamento di $\overline{BC}$. Quando tale "percorso" passa per C , la lunghezza del segmento $\overline{A'U}$ rappresenta una soluzione reale dell'equazione cubica.

Di tali percorsi in generale ne possono esistere al massimo tre, pari al grado dell'equazione.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $OA'U$ e $AA'B'$ si ha che:

$$OU = 1, \quad A'U = x = \tan \vartheta, \quad AA' = AU + UA' = b' + x$$

$$\frac{AB'}{AA'} = x$$

allora

$$AB' = x^2 + b'x$$

Dalla similitudine dei triangoli $A'AB'$ e $BB'C$ si ha che

$$\frac{BC}{BB'} = x$$

$$BB' = BA + AB' = x^2 + b'x + c';$$

$$BC = x^3 + b'x^2 + c'x$$

$BC = d'$, da ciò segue che

$$x^3 + b'x^2 + c'x = d'.$$

■

Risolvere un problema di terzo grado si può quindi ricondurre a determinare “il percorso” che partendo da O arriva fino a C .

A questo punto ci può essere di aiuto il metodo adottato da Margherita Beloch Piazzolla (1930) per risolvere il seguente problema: “Costruire un quadrato di cui due lati opposti passino rispettivamente per due punti dati, e i due vertici situati su uno dei rimanenti lati stiano rispettivamente su due rette date.”⁴

Con riferimento alla precedente rappresentazione dell'equazione di terzo grado, consideriamo la retta r distante l'unità da $\overline{UA}$ e perpendicolare al segmento $\overline{OU}$, la retta s distante c da $\overline{AB}$ e perpendicolare al segmento $\overline{BC}$.

Quindi consideriamo la parabola avente per fuoco il punto O e per direttrice la retta r è quella avente per fuoco il punto C e per direttrice la retta s . A questo punto, utilizzando l'assioma O6, portiamo O su r e C su s simultaneamente. Otteniamo così la tangente comune alle due parabole. Tale retta incontra i prolungamenti nei punti A' e B' ; unendo il punto O con A' e il punto C con B' riusciamo a individuare un cammino che va da O a C risolvendo così l'equazione richiesta. Si può osservare, utilizzando le note proprietà focali della parabola, che la retta costruita risulta essere ortogonale al segmento $\overline{OA'}$ così come al segmento $\overline{CB'}$ (vedi Fig.18).

⁴ Beloch M.P., 1936, Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, *Periodico di Matematiche* IV, XVI, p. 104-108.

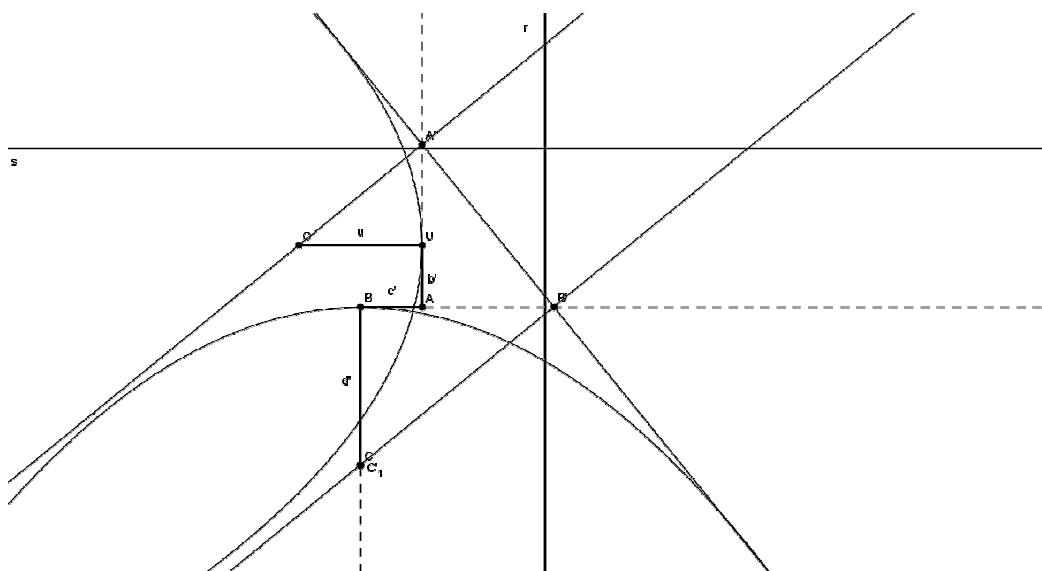


Fig.18

Trisezione di un angolo e duplicazione del cubo.

Fin dall'antichità, si è cercato di risolvere, utilizzando la geometria della riga e compasso accanto al problema della quadratura del cerchio, alcune questioni riguardanti problemi come la trisezione di un angolo o la duplicazione del cubo, senza però riuscire a trovarne una soluzione. Il problema delle costruzioni con riga e compasso ha accompagnato gli sviluppi della geometria già nella Grecia antica. Per i matematici greci i problemi geometrici si presentavano non nella forma genericamente esistenziale, ma in quella costruttiva.

La geometria era inoltre utilizzata per risolvere quelli che per noi ora sono problemi algebrici.

La trisezione dell'angolo "chiede" se sia possibile costruire un angolo avente ampiezza pari ad un terzo di quella di un angolo assegnato.

Per affrontare il problema bisogna innanzitutto premettere una definizione e un lemma sulla costruibilità:

Definizione: *Un numero reale c , è costruibile (con gli origami o con riga e compasso) se si riesce a costruire un segmento di lunghezza $|c|$, dopo avere fissato precedentemente l'unità di misura.*

Quindi un punto P è costruibile se e solo se lo sono le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano.

Lemma: Se un numero reale c soddisfa un polinomio irriducibile (in $\mathbb{Q}[x]$) di grado n che non è una potenza di 2, allora il numero non è costruibile con Riga e Compasso.

Costruire un angolo α equivale a costruire un segmento di lunghezza $\cos \alpha$. Dall'identità trigonometrica:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

si vede che $\cos \alpha$ è soluzione dell'equazione di 3 grado:

$$x^3 - \left(\frac{3}{4}\right)x - \left(\frac{1}{4}\right) - \cos 3\alpha = 0$$

Quest'ultima può essere risolta con gli origami utilizzando l'assioma O6 e la costruzione geometrica precedente (vedi Fig.19)

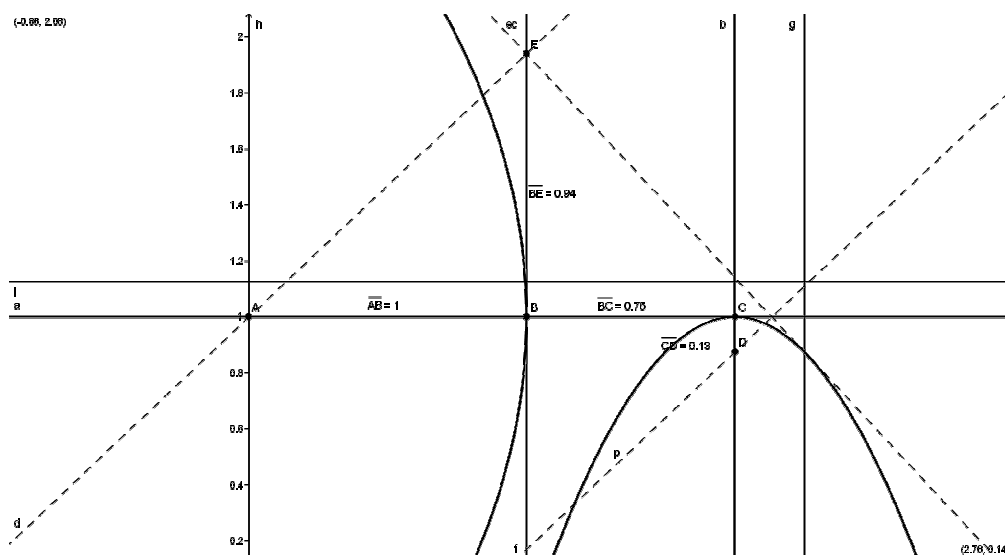


Fig.19

Partendo da un foglio di carta si può trisecare un angolo utilizzando ad esempio il Metodo di Abe⁵.

Trisecare un angolo qualsiasi risulta “impossibile” con Riga e Compasso. Infatti basta prendere ad esempio $3\vartheta = \pi/3$ e cercare di costruire $\vartheta = \pi/9$

Il $\cos(\pi/9)$ soddisfa il polinomio $8x^3 - 6x - 1$ (irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$) il

⁵ Hushimi K.,1980, Trisection of angle by H. Abe in Origami no kagaku, *Saiensu American*, Vol.8.

cui grado non è una potenza di 2. Quindi per il lemma precedente $\pi/3$ non è trisecabile.

Un altro problema che non può essere risolto con la geometria di Riga e Compasso è quello della duplicazione del cubo: dato un cubo di lato l trovare il lato (L) del cubo di volume doppio.

Il problema della duplicazione del cubo è giunto a noi sotto forma di mito. La prima testimonianza in merito è una lettera di Eratostene al re Tolomeo in cui si narra di un antico tragico che, mettendo in scena il re Minosse al cospetto del sepolcro di forma cubica del re Glauco, disse: «piccolo sepolcro per un re: lo si faccia doppio conservandone la forma; si raddoppino, pertanto, tutti i lati».

Tale problema richiede se si possa trovare la radice cubica di 2 assumendo che il lato del cubo di partenza sia uguale a 1 e quindi di risolvere l'equazione:

$$X^3 - 2 = 0$$

In questo caso $\sqrt[3]{2}$ soddisfa il polinomio $X^3 - 2$, che è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ ed è di grado 3 che non è una potenza di 2.

Allora, utilizzando il lemma di pag.16, si può osservare che $\sqrt[3]{2}$ non è costruibile con riga e compasso. Quindi anche il problema della duplicazione del cubo non può essere risolto con metodi euclidei.

La geometria degli origami riesce, invece, a risolverlo utilizzando l'assioma O6 che trova applicazione nel metodo proposto da Peter Messer che si sviluppa in vari passaggi:

Inizialmente dobbiamo piegare il foglio in 3 parti uguali e riaprire.⁶ Possiamo individuare la linea l_1 , il punto P_1 , la linea l_2 e il punto P_2 come mostrato in Fig.20.

La linea l_1 e il punto P_1 corrispondono alla direttrice e al fuoco di una parabola. Analogamente l_2 e P_2 corrispondono alla direttrice e al fuoco di una seconda parabola.

⁶ La suddivisione del foglio in 3 parti uguali sarà spiegata nel prossimo paragrafo

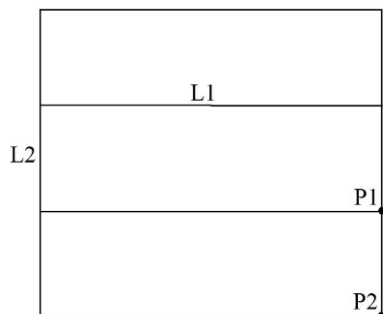


Fig.20

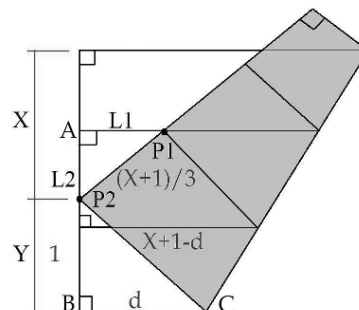


Fig.21

Applichiamo l'assioma O6 portando P_1 su l_1 e P_2 su l_2 simultaneamente.

Il punto dove P_2 incontra l_2 divide il lato del quadrato in due segmenti X e Y come indicato in Fig.21. Il rapporto $X/Y = \sqrt[3]{2}$.

Per dimostrare ciò, assumiamo per fissare le idee che $Y=1$. Ciò fa sì che il lato del quadrato abbia misura $X+1$ (vedi Fig.21). Quindi si deve provare che $X = \sqrt[3]{2}$.

Scrivendo il teorema di Pitagora per il triangolo P_2BC si ha che:

$$d = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}.$$

Inoltre la lunghezza di AP_2 è

$$X - \frac{X+1}{3} = \frac{2X-1}{3}$$

Sfruttando la similitudine tra i triangoli P_2BC e P_2AP_1 si ha che:

$$\frac{d}{X+1-d} = \frac{2X-1}{X+1} \Rightarrow \frac{(X^2+2X)}{X^2+2X+2} = \frac{2X-1}{X+1}$$

Da ciò segue che:

$$X^3 = 2$$

■

Risoluzione di Problemi di tipo “origami” con la matematica.

Un problema che si può presentare facendo un origami, è quello della suddivisione del foglio di carta in un certo numero prefissato di parti uguali. Se si tratta di dividere lo stesso foglio a metà e poi in quattro, il problema è intuitivamente risolvibile, ma in tutti gli altri casi ad esempio dividere in cinque parti uguali, diventa un po' più complesso. In questi casi il problema può essere affrontato con diversi metodi. Il primo prende il nome di approssimazione di Fujimoto⁷ e si svolge in alcuni passi: (vedi Fig.22)

Inizialmente si crea un pinch (piccola piega) che si pensa dovrebbe essere $1/5$, nella parte sinistra del foglio. A destra del pinch abbiamo circa i rimanenti $4/5$ del foglio. Dividiamo tale parte a metà. Questa ultima piega creata è vicina alla linea dei $3/5$. A destra di questa abbiamo circa i rimanenti $2/5$ del foglio. Dividiamo nuovamente tale parte a metà. Ora abbiamo creato la linea $1/5$ sulla destra. A sinistra di questa linea abbiamo circa i $4/5$ del foglio. Suddividiamo questa parte a metà ottenendo così una piega in vicinanza dei $2/5$. Dividiamo a metà la parte sinistra. Questa ultima piega sarà molto vicino al valore esatto $1/5$.

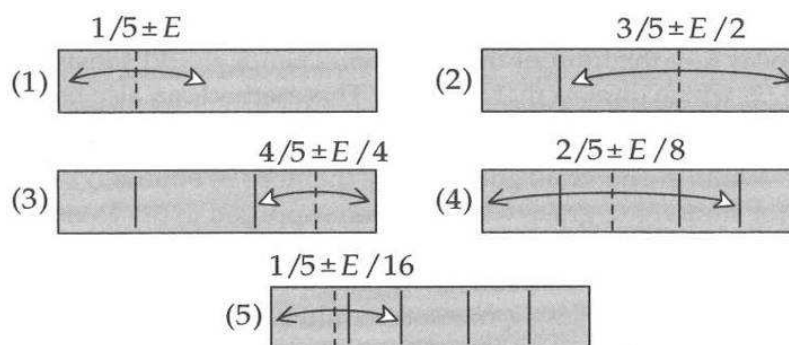


Fig.22

Dal procedimento descritto e dalla figura si può notare che l'errore in ogni piega decresce esponenzialmente. Detto in altri termini, l'errore tende a zero all'aumentare del numero delle pieghe.

⁷ Vedi Fujimoto S., Nishiwaki M., 1982, *Seizo suru origami asobi no shotai*, Tokyo

L'approssimazione di Fujimoto può essere utilizzata, come valido ausilio didattico, per introdurre il concetto di limite di una successione in una scuola superiore. Tale costruzione può essere una guida utile per introdurre una discussione sulla natura dell'errore quando facciamo delle operazioni nel "mondo reale", come ad esempio l'origami.

La "bellezza" del metodo di Fujimoto risiede nel fatto che si riesce a lavorare nonostante l'errore creato dalla piegatura della carta. Dall'errore può scaturire, in un gruppo classe, un dialogo-dibattito tra gli studenti e gli insegnanti e può rappresentare la base per attività didattiche per es. Cercare di capire quale numero di pieghe è necessario per raggiungere una precisione fissata.

Il secondo metodo permette di dividere una lunghezza esattamente in n parti uguali. Per semplicità supponiamo che $n=3$ (per il caso generico si può procedere in modo analogo).

Prendiamo un foglio quadrato e pieghiamo una mediana e una diagonale; successivamente pieghiamo la diagonale del rettangolo di destra, come mostrato in Fig.23 e troviamo il punto P che ha l'ascissa pari a $2/3$ del lato del quadrato.

Supponiamo che il foglio quadrato abbia il lato di lunghezza unitaria e consideriamo la figura seguente:

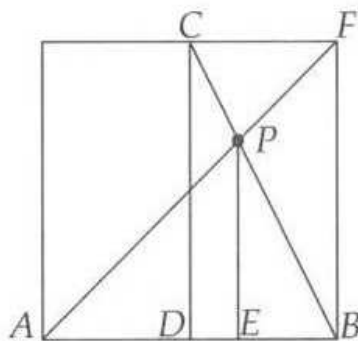


Fig.23

Denotiamo le coordinate di P con (x, x) . Allora AE ha lunghezza x , così EB ha lunghezza $1 - x$. Anche EP ha lunghezza x .

Sfruttando la similitudine tra i triangoli BDC e BEP si ha che

$$\overline{CD} / \overline{PE} = \overline{BD} / \overline{BE}$$

Quindi

$$\frac{1}{x} = \frac{1/2}{1-x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = 2/3$$

Conclusioni

Nel corso della mia esperienza nelle scuole anche di diverso ordine, in cui, in qualità di operatore ho cercato di realizzare percorsi mirati e gradualmente, ho inteso sì insegnare l'arte dell'origami, come arte del "piegare" ma piegare in maniera "pensata" cioè cercando di comprendere e capire cosa si nasconde dietro le pieghe anche dal punto di vista matematico.

Con la danza delle mani che piegano la carta e lavorano per realizzare le figure si compie un gesto creativo in quanto si dà forma e si concretizza un'idea e si ottiene un oggetto completo.

Proprio da tale "danza" scaturisce una vera e propria teoria: la geometria dell'origami.

L'affermazione di Pedersen *"La geometria è un'arte anche degli occhi e delle mani, non solo della mente"* ci può far riflettere e ci può far capire quanto questa sia vicina all'arte dell'origami.

Ho potuto inoltre verificare e sperimentare direttamente sul campo come l'attività di origami possa rappresentare una forma di "laboratorio", un mezzo per apprendere, per es. nella scuola primaria, in maniera ludica e più concreta le basi strumentali della matematica, mentre nelle scuole secondarie un mezzo per approfondire in maniera diversa concetti svolti in matematica, permettendo di fissare quindi in maniera alternativa concetti matematici più astratti (es. la soluzione di equazioni di 2° e 3° grado, il concetto di limite, di successione, ecc.), senza però nulla togliere al processo di astrazione mentale che bisogna anzi favorire e sviluppare.

L'origami, secondo me, dovrebbe rivestire un ruolo ben preciso e ben qualificato e porsi nell'ambito didattico - educativo come disciplina importante in quanto può permettere di raggiungere vari obiettivi, basilari per lo sviluppo personale: favorire le potenzialità creative, affinare le abilità di ciascuno, studiare la coordinazione manuale (affinando anche la motricità fine), la curiosità, l'impegno, la concentrazione e la precisione.



Fig.24

Bibliografia

- Alperin R.C.,2000, A mathematical theory of origami constructions and numbers, *New York Journal of Mathematics*, Vol.6, p. 119-133.
- Artin M.,1997, Algebra, BOLLATI BORINGHIERI.
- Beloch M.P.,1936, Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici, *Periodico di Matematiche* IV, XVI p. 104-108.
- Cox D.,2004,Galois Theory, John Wiley & Sons, Hoboken
- Fujimoto S., Nishiwaki M.,1982, *Seizo suru origami asobi no shotai*, Tokyo.
- Geretschlager R.,2002, *Geometric construction in Origami*, MORIKITA PUBLISHING, Tokyo.
- Hatori K., How to divide the side of square paper, presente in http://www.origami.gr.jp/Pepople/CAGE_/divide/index-e.html
- Huffman D.A.,1976, Curvature and creases: a primer on paper, *IEEE Transactions on Computers*, Vol.C-25, No.10, p. 1010-1019.
- Hushimi K.,1980, Trisection of angle by H. Abe in *Origami no kagaku*, Saiensu American, Vol.8.
- Huzita H.,1992, Understanding geometry through origami axioms: I sit the most adequate method for blind children?, *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy*, BRITISH ORIGAMI SOCIETY, London, p. 37-70.

- Huzita H., Scimemi B., 1989, The algebra of paper-folding (origami), *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Ferrara, p. 205-222.
- Lang R.J., 2003 *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, A K PETERS, Natick.
- Lang R.J., 2003, Origami and geometric constructions, manoscritto non pubblicato.
- Messer P., 1986, Problem 1054, *Crux Mathematicorum*, Vol.12, No.10, p. 284-285.
- Miura K., 1989, A note on intrinsic geometry of origami, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Ferrara, Italia, p. 239-249.

Antonio Caserta

